FH Aachen, Abt. Jülich 15.07.2004
G. Dikta

Name:______________________________Matr. Nr.:________________

Klausur zur Vorlesung "Funktionalanalysis: Maß- und Integrationstheorie"

Aufgabe 1: 14 P.

Geben Sie den Satz von der monotonen Konvergenz exakt an und skizzieren Sie den Beweis.

Aufgabe 2: 8 P.

Gegeben sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^*, \lambda)$, der Lebesguesche Maßraum auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ versehen mit den Borelmengen $\mathcal{B}^*$ und dem Lebesgue Maß λ. Ferner sei $\Omega := \{0,1\}$ und $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\}$ die Potenzmenge von Ω. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow T(x) := \begin{cases} 0 & : x \text{ ist rational} \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{B}^* - \mathcal{A}$ meßbar ist und berechnen Sie $\lambda(T^{-1}(\{0\}))$ und $\lambda(T^{-1}(\{1\}))$.

Aufgabe 3: 14 P.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von meßbaren Mengen aus $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) $\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(b) Falls $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, dann gilt: $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Aufgabe 4: 14 P.

Sei $([0,1], \mathcal{B}^*, \lambda)$ das Lebesgue-Maß auf dem Einheitsinterval und $\mathcal{B}^*$ das zugehörige System der Borelmengen. Für jedes feste $\alpha > 1$ wird dann durch

$$f_{n,\alpha} : [0,1] \ni x \longrightarrow f_{n,\alpha}(x) := \exp(x^n) \frac{1}{\alpha - x} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Folge $(f_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ $\lambda-$integrierbarer Funktionen definiert. Zeigen Sie:

(a) Für jedes feste $\alpha > 1$ erfüllt $(f_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue zur majorisierten Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie $\alpha > 1$ so, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_{n,\alpha}(x)\, \lambda(dx) = 17.$$